MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Alina Carmen Birta
Sorin Doru Noaghi
Dan Zaharia
Maria Zaharia

Matematika 8

Tankönyv a VIII. osztály számára

TARTALOMJEGYZÉK

1. Halmazok meghatározása elemeik közös tulajdonságával

1.*l.* Halmazok

Történelmi visszatekintő: A halmazok módszeres vizsgálata a halmazok elméletéhez vezetett, amely később alapvetővé vált a matematika tanulmányozásában. A halmazelmélet a matematika minden ágazatának közös alapját képezi. Sőt, a matematikai érvelés módszerei logikai érvek és a halmazelmélet kombinációja.
A **halmazelmélet** alapítója ***Georg Cantor*** német matematikus (1845-1918).

Emlékeztető

A halmaz jól definiált és különálló tárgyaknak (a halmaz elemeinek) összessége, amelyeket létezőknek tekintünk

Ha A egy halmaz és x a halmazhoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy x eleme az A halmaznak, és így írjuk: $x \in A$. Ha x nem eleme az A halmaznak, akkor így írjuk $x \notin A$.

Az $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmaz esetén írhatjuk, hogy: $1 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 9 \in A$. $0 \notin A, 2 \notin A$.

Azt a halmazt melynek nincs egyetlen eleme sem a $\varnothing$ szimbólummal jelöljük, és *üres halmaz*nak nevezzük.

Azon VIII-dikos tanulók halmaza, akik nem végezték el a VII. osztályt üres halmaz, azaz nincs egyetlen eleme sem.

Azt a halmazt, melyben az elemek száma véges, *véges halmaz*nak, valamint a halmaz elemeinek számát a halmaz *kardinálisá*nak nevezzük.

$A = \{$Ana, Alexandra, Adrian$\}$ egy véges halmaz és kardinálisa 3.
Így írjuk: card $A = 3$.

A számokból álló halmazt *számhalmaz*nak nevezzük.

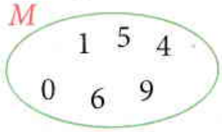
$B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ egy számhalmaz, és $C = \{$fehér, kék, arany, ezüst$\}$ nem számhalmaz.

Egy halmaz meghatározható (megadható, leírható):

1) *elemeinek felsorolásával*

$M = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

2) *Venn-Euler diagrammal*



3) *elemeinek egy közös tulajdonságával*

$M = \{x \mid x$ egy négyzetszám utolsó számjegye$\}$

Oldjuk meg figyelmesen!

1 ET Legyen M az „útvonal” szót alkotó betűk halmaza.
a) Melyik igaz kijelentés: $l \in M$; $a \in M$; $e \in M$; $m \in M$.
b) Határozd meg az M halmazt elemeinek felsorolásával!
c) Ábrázold az M halmazt Venn-Euler diagram segítségével!
d) Megfigyelve azt a kijelentést miszerint **ha x az M halmaz egy eleme, akkor az x az „útvonal” szó egy betűje**, írd le a halmazt összes elemének egy közös tulajdonságával!

2 PT Adott az $A = \{x \mid x$ a *siker* szó egy betűje$\}$ és $B = \{x \mid x$ páratlan számjegy$\}$.
a) Határozd meg az A és B halmaz elemeit, majd írd le ezeket a halmazokat elemeiknek felsorolásával!
b) Melyik számhalmaz a fentiek közül?

Alkalmazás

1. példa: Adott az
$A = \{a \in \mathbb{Z} \mid -10 < a \leq 30\}$,
$B = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = \sqrt{a}\,,\ a \in A\}$ halmaz.
a) Határozd meg az A halmaz kardinális számát!
b) Írd le a B halmazt elemeinek felsorolásával!

Megoldás. **a)** Az A halmaz 9 negatív egész számot, a 0 számot és 30 pozitív egész számot tartalmaz, tehát $cardA = 40$.
b) Ha $b \in \mathbb{Z}$ és $b = \sqrt{a}$, akkor a négyzetszám. Mivel $a \in A$, azt kapjuk, hogy $a \in \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$, tehát $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

2. példa: Döntsd el, hogy az alábbi halmazok közül melyik véges illetve végtelen halmaz!
$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ az } 50 \text{ osztója}\}$;
$D = \{y \in \mathbb{N} \mid 50 \text{ az } y \text{ osztója}\}$;
$E = \{t \in \mathbb{N} \mid t = 7n + 1,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Megoldás. $C = \{1, 2, 5, 10, 25, 50\}$ véges halmaz.
$D = \{0, 50, 100, 150, \ldots\}$ végtelen halmaz.
Az $\mathbb{N}$ végtelen halmaz, és E tartalmazza, az összes olyan természetes számot, melyet 7-tel osztva a kapott maradék 1. Tehát E végtelen halmaz.

Gyakorlatok és feladatok

1. Figyeld meg az alábbi elemeinek felsorolásával megadott halmazokat! $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$; $B = \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$; $C = \{0, 3, 6, 9, 12, \ldots\}$. Írd le mindenik halmazt elemeinek egy közös tulajdonságával!

2. Írd le a halmazt elemeinek felsorolásával!
$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ és } 2 \leq x < 7\}$;
$B = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ és } -3 \leq x < 2\}$;
$C = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } -3 \leq x < 2\}$;
$D = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ és } 11 < x^2 \leq 50\}$;
$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } 12 \leq x^2 \leq 47\}$;
$F = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } 14 \leq 3x^2 < 122\}$.

3. Adott az alábbi halmaz:
$$M = \left\{-7; -\frac{1}{3}; -\sqrt{4}; 0; \sqrt{2}; \sqrt{3}; 0{,}5; 7\right\}.$$
Írd le elemeinek felsorolásával a halmazokat:
$A = \{x \in M \mid x \in \mathbb{N}\}$; $B = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Z}\}$;
$C = \{x \in M \mid x \in \mathbb{Q}\}$; $D = \{x \in M \mid x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$.

4. Adott a következő halmaz $A = \{2, 3, 4\}$ és $B = \{1, 2, 3, 6\}$. Határozd meg a
$$C = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in A,\ b \in B\right\}$$ halmazt.

5. Gondolj egy olyan halmazra, melynek kardinálisa 5, majd írd le háromféleképpen: elemeinek felsorolásával, Venn-Euler diagram segítségével, elemeinek egy közös tulajdonságával.

6. Legyen $M = \{x \in \mathbb{N} \mid x - 13 < 31\}$.
A megadott minta alapján határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét!

Kijelentés	*Indoklás és válasz*
$13 \in M$	$13 \in \mathbb{N}$, $13 - 13 = 0$ és $0 < 31$, tehát a kijelentés igaz.
$31 \notin M$	
$44 \in M$	
$3^3 \notin M$	
$-13 \in M$	

7. Adott az $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x + 4 < 25 \text{ és } 2x > 10\}$ halmaz.
a) Határozd meg a halmaz elemeit!
b) Állapítsd meg, hogy a 2; 4; 5; 11; 25; 30, számok mindegyike eleme vagy sem az A halmaznak!

8. Adott a $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 5x^2 < 225\}$ halmaz.
a) Határozd meg a B halmaz elemeit!
b) Állapítsd meg, hogy a B halmaz elemei közül melyik köbszám!

9. Adott a $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^3 < 600\}$ halmaz.
a) Határozd meg a C halmaz elemeit!
b) Állapítsd meg, hogy a C halmaz elemei közül melyik négyzetszám!
c) Határozd meg a következő halmaz elemeit! $D = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 3a + 2,\ a \in C\}$.

2.4. Halmazok közötti reláció. Halmazokkal végzett műveletek.

A. Halmazok közötti reláció

Emlékeztető

1. Azt a két halmazt, melyeknek ugyanazok az elemei *egyenlő halmazoknak* nevezzük.
Ha az A és B halmaz egyenlő, akkor így írjuk $A = B$.
Ha az A és B halmaz nem egyenlő, akkor így írjuk $A \neq B$.

Ha
$A = \{3, 4\}$,
$B = \{x \mid x \text{ a 43 számjegye}\}$,
$C = \{2, 4\}$, akkor igazak az $A = B$, $A \neq C$ és $B \neq C$ relációk.

2. Az A halmaz a B halmaz része, ha az A halmaz minden eleme a B halmaz eleme is. Ha az A halmaz a B halmaz része, akkor így írjuk: $A \subset B$.
Még mondhatjuk azt is, hogy B halmaz tartalmazza az A halmazt, azaz $B \supset A$. Ha az A halmaz nem része a B halmaznak, akkor azt így írjuk: $A \not\subset B$.

Ha $A = \{3, 9\}$ és $B = \{x \mid x \text{ egy 10-es számrendszerbeli számjegy}\}$, mivel 3 és 9 az A halmaz elemei 10-es számrendszerbeli számjegyek, akkor $A \subset B$ vagy $B \supset A$.
A $B = \{x \mid x \text{ egy 10 számrendszerbeli számjegy}\}$ halmaz tartalmazza az $x = 1$ elemet, amely nem eleme az A halmaznak, $A = \{3, 9\}$, tehát $B \not\subset A$.

3. Ha $A \subset B$, akkor az A halmazt a B halmaz *részhalmazának* nevezzük. Az üres halmaz, melyet $\varnothing$ szimbólummal jelölünk, minden halmaz részhalmaza, vagyis: $\varnothing \subset A$ bármely A halmaz esetén.

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tehát $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ részhalmaza, amely $\mathbb{Q}$ a részhalmaza, amely a $\mathbb{R}$ részhalmaza.
Feladat: Írj más olyan részhalmazt is, amely megfelel ezeknek a bennfoglalási relációknak. Próbáld meg és indokold a válaszod!

Oldjuk meg figyelmesen!

1 ET Adottak a következő halmazok: $A = \{3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E = \{x \mid x \text{ számjegy}, x \neq 9 \text{ és } x \neq 0\}$.

a) Írd le az E halmazt elemeinek felsorolásával!

b) Másold a füzetbe és egészítsd ki úgy, hogy igaz kijelentést kapj!
„Az … és … halmazok egyenlőek, mivel ugyanazok az elemeik."

c) Másold le a füzetbe és írj a kijelentés melletti cellába (I) betűt, ha igaz, vagy (H) betűt, ha hamis a kijelentés. $B \subset C$; $C \subset B$; $B \subset D$; $A \subset B$.

2 FT Figyeljük meg az előző feladatban levő A, B, C, D, E halmazokat!

a) Keresd meg azt a halmazt, amely tartalmazza az összes többit. Írd le a válaszodat igazoló relációkat!

b) Keresd meg azt a halmazt, amely része a másik négynek! Írd le a válaszodat igazoló relációkat!

Megoldás. **a)** Megfigyeljük az 1. feladatban adott halmazokat, $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
Észrevesszük, hogy $A \subset E$, $B \subset E$, $C \subset E$, $D = E$, tehát $D \subset E$, vagyis az E halmaz tartalmazza a másik négyet. Mivel $D = E$, a D halmaz is tartalmazza a másik négy halmazt.
b) Észrevesszük, hogy $A \subset B$, $A \subset C$, $A \subset D$, $A \subset E$, tehát az A halmaz a többi halmaz részhalmaza.

Alkalmazás

1. alkalmazás. ET **a)** Az 1. és 2. feladat eredményeit használva írd le a D és E halmaz közötti összes relációt (bennfoglalás vagy egyenlőség)!

b) Határozd meg a következő kijelentések logikai értékét:
p_1: $A \subset A$, bármely A halmaz esetén; p_2: $A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ és } B \subset A)$.

Megoldás.

a) $D = E$; $E = D$; $D \subset E$; $E \subset D$;

b) Az A halmaz minden eleme az A halmazhoz tartozik, tehát a p_1 kijelentés igaz.

$A = B$ akkor és csakis akkor, ha A és B elemei megegyeznek, vagyis az A halmaz elemei a B halmaz elemei is, és a B halmaz elemei az A halmaz elemei is, vagyis $A \subset B$ és $B \subset A$). Következésképpen $A = B \Leftrightarrow (A \subset B$ és $B \subset A)$, tehát a p_2 kijelentés igaz.

2. alkalmazás. Legyen E az általános iskola VIII. osztályos tanulóinak halmaza. Adott az

FT $A = \{x \in E \mid x$ robotika körre jár$\}$; $B = \{x \in E \mid x$ szereti a fizikát$\}$;
$C = \{x \in E \mid x$ szereti a matematikát$\}$ halmaz. Ebben az iskolában ha egy tanuló robotika körre jár, akkor szereti a fizikát, és szereti a matematikát.
Határozd meg az A, B, C, E halmazok közötti bennfoglalási relációkat!

Megoldás. Észrevesszük, hogy ha $x \in A$, akkor $x \in E$, vagyis $A \subset E$. Hasonlóan: $B \subset E$ és $C \subset E$.
Legyen x az iskola egy tanulója ($x \in E$):

Hétköznapi módon megfogalmazva	*Matematikai nyelven*	*Következtetés*
Ha x robotika körre jár, akkor szereti a fizikát.	Ha $x \in A$, akkor $x \in B$.	$A \subset B$
Ha x szereti a fizikát, akkor szereti a matematikát.	Ha $x \in B$, akkor $x \in C$.	$B \subset C$
Ha x robotika körre jár, akkor szereti a fizikát, valamint ha x szereti a fizikát, akkor x szereti a matematikát.	Ha $x \in A$, akkor $x \in B$. Mivel $x \in B$, => $x \in C$. Tehát, ha $x \in A$, akkor $x \in C$.	$A \subset C$

Következésképpen $A \subset B \subset C \subset E$.

B. Halmazokkal végzett műveletek

Emlékeztető

Az A és B halmaz *egyesítése* az a halmaz, melynek elemei legalább az egyik halmaznak elemei: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ vagy $x \in B\}$.

Ha $A = \{x \mid x$ nullától különböző számjegy$\}$ és $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, kapjuk, hogy $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$

Az A és B halmaz *metszete* az a halmaz, melynek elemei mindkét halmaznak elemei: $A \cap B = \{x \mid x \in A$ és $x \in B\}$.

Ha $A = \{x \mid x$ nullától különböző számjegy$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, kapjuk, hogy $A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ha $A \cap B = \varnothing$, akkor az A és B halmazokat *diszjunkt* halmazoknak nevezzük.

A $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ halmazok diszjunktak, vagyis $\mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) = \varnothing$.

Az A és B halmaz *különbsége* az a halmaz, amely az A halmaz elemeiből áll, de nem tartalmazza a B halmaz elemeit: $A - B = \{x \mid x \in A$ és $x \notin B\}$.

Ha $A = \{x \mid x$ nullától különböző számjegy$\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 7\}$, kapjuk, hogy $A - B = \{7, 8, 9\}$.
Az irracionális számok halmaza $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

3. alkalmazás. Adott az $A = \{x \mid x \text{ páros számjegy}\}$, $B = \{2, 4, 5, 7\}$ és $C = \{4, 6, 7, 9\}$.

FT **a)** Írd le az A halmazt elemeinek felsorolásával!

b) Számítsd ki: $A \cup B$; $A \cup C$; $B \cup C$; $A - B$; $B - C$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$; $(A \cup C) - B$.

Megoldás. **a)** $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

b) $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8\}$;

$A \cup C = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in C\} = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$; $B \cup C = \{x \mid x \in B \text{ vagy } x \in C\} = \{2, 4, 5, 6, 7, 9\}$;

$A - B = \{x \mid x \in A \text{ és } x \notin B\} = \{0, 6, 8\}$; $B - C = \{x \mid x \in B \text{ és } x \notin C\} = \{2, 5\}$;

$A \cup B \cup C = \{x \mid x \in A \text{ vagy } x \in B \text{ vagy } x \in C\} = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

$A \cap B \cap C = \{x \mid x \in A \text{ és } x \in B \text{ és } x \in C\} = \{4\}$; $(A \cup C) - B = \{x \mid x \in A \cup C \text{ és } x \notin B\} = \{0, 6, 8, 9\}$.

Gyakorlatok és feladatok

1. Az $M = \{0, 2, 6, 12, 20\}$ és $P = \{a \mid a = x \cdot (x + 1),\ x \in \mathbb{N} \text{ és } x < 5\}$, halmazok esetén határozd meg az igaz kijelentések számát:

a) $M \subset P$; **b)** $M = P$;

c) $P \subset M$; **d)** $M \neq P$.

2. **a)** Írd le az $A = \{a, b\}$ halmaz összes részhalmazát!

b) Következtesd ki egy kételemű halmaz részhalmazainak számát!

c) Határozd meg egy háromelemű halmaz részhalmazainak számát!

3. Határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét:

a) $\{-1; 0; 2\} \subset \mathbb{Z}$; **b)** $\{-\sqrt{3}; \sqrt{5}; -\sqrt{2}\} \not\subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

c) $\{-1; 3\} \subset \mathbb{N}$; **d)** $\{-4\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$;

e) $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; **f)** $\{-\sqrt{9}; 2\} \subset \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

4. Adott az $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ és $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N} \text{ és } x \leq 4\}$ halmaz.
Számítsd ki: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ és $B - A$.

5. Adott az $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ és } -4 \leq x < 3\}$ és $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } -4 \leq x < 3\}$.

a) Számítsd ki: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ és $B - A$.

b) Határozd meg a kijelentések logikai értékét: $A \subset B$; $B \subset A$; $A \subset (A \cup B)$; $A \subset (B - A)$.

6. Számítsd ki: $A \cup B$; $A \cap B$; $A - B$ és $B - A$ ha:

a) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ és } 3 < x \leq 6\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } -3 \leq x < \sqrt{5}\}$;

b) $A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ és } -2\sqrt{3} \leq x < 3\sqrt{2}\}$;

$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ és } -2\sqrt{3} \leq x < 3\sqrt{2}\}$.

7. Írd le az $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmazt két olyan diszjunkt X és Y halmaz egyesítéseként, melyre igaz, hogy az X elemeinek összege és az Y halmaz elemeinek összege egyenlő!

8. Határozd meg a kijelentések logikai értékét:

$\sqrt{1^3 + 2^3 + 3^3} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{9^2 + 12^2} \in \mathbb{Z}$;

$\sqrt{3^3 \cdot 12} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{225} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\sqrt{2\frac{1}{4}} \in \mathbb{Q}$.

9. Ha $x = \sqrt{221 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 440}$, határozd meg a kijelentések logikai értékét:

$\sqrt{x} \in \mathbb{N}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$.

10. Adott a következő halmaz:

$$A = \left\{3^2; (-1)^2; (-2)^{-3}; \sqrt{2\frac{7}{9}}; \sqrt{12}; \sqrt{0,(2)}; (-2)^3\right\}.$$

Számítsd ki: $A \cap \mathbb{N}$; $A - \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A - \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$; $A \cap \mathbb{R}$; $A \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$; $A \cap (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$.

11. Adott az $A = \{1, 2, 3, 4, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$ és $C = \{3, 6, 7\}$ halmaz.
Ellenőrizd, hogy igazak-e az egyenlőségek:

a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

b) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

12. Határozd meg az A és B halmazokat, ha egyidejűleg teljesülnek az alábbi feltételek:

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

2) $A \cap B = \{3, 4, 5\}$;

3) $1 \in (A \setminus B)$;

4) $2 \in (B \setminus A)$.

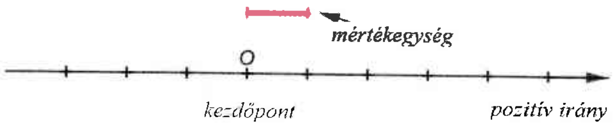
2. Intervallumok. Az intervallumok ábrázolása a számtengelyen. Intervallumok metszete és egyesítése

1.ℓ. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítések segítségével. Egy egyenes részhalmazai.

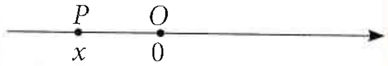
Emlékeztető

A. Valós számok ábrázolása a számtengelyen közelítések segítségével

(1) Számtengelynek nevezzük azt az egyenest, melyen rögzítettünk egy *kezdőpont*nak (origónak) nevezett O pontot, valamint egy *pozitív irányt* és egy *mértékegységet*.

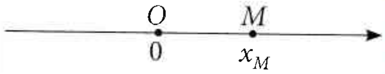


(2) Bármely valós számnak a számtengely egyetlen pontja felel meg. A 0 valós számnak megfelel az O pont. Ha az x valós számnak megfelel a P pont, akkor azt mondjuk, hogy a P pont koordinátája az x, és így írjuk: $P(x)$



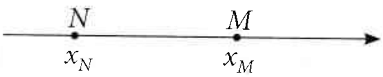
Értelmezés szerint $|x| = OP$.

(3) Fordítva is igaz, vagyis a számtengely M pontjának egyetlen valós szám felel meg, melyet x_M szimbólummal jelölünk.



A (2) és (3) alapján kijelenthetjük, hogy *a valós számok halmazának megfelel egy egyenes pontjainak halmaza.*

(4) Ha M és N a számtengely tetszőleges két pontjának koordinátái x_M és x_N, akkor $MN = |x_N - x_M|$.



(5) Általában az irracionális számoknak a számtengelyen ábrázolására a tizedes közelítésüket használják.

B. Egy egyenes részhalmazai.

A d egyenes két tetszőleges A és B pontja meghatározza az AB szakaszt.

A d egyenes tetszőleges A pontja meghatároz két ellentétes félegyenest. Ha a d egyenes M és N pontja az A pont két különböző oldalán helyezkedik el, akkor AM illetve AN a kapott két félegyenes.

Alkalmazás

1 ET A mellékelt ábrán látható egyenesen felvesszük az A, B, C, D pontokat.

a) Határozd meg az A, B, C, D pontok koordinátáit!

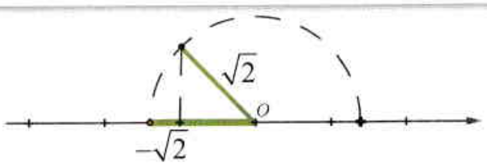
b) Használva az $MN = |x_N - x_M|$, képletet, számítsd ki az AB, AC, AD, CB, DB, DC és DO szakaszok hosszát!

c) Ellenőrizd az előző alpont eredményeit megszámolva az ábrán a szakaszok hosszának megfelelő mértékegységeket.

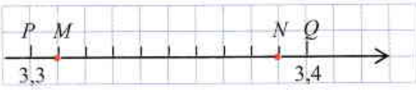
Megoldás. **a)** Az A, B, C illetve D pontok koordinátái az $x_A = 3$, $x_B = 2$, $x_C = -1$ és $x_D = -2$. valós számok.
b) Használva az $MN = |x_N - x_M|$, képletet azt kapjuk, hogy: $AB = 1$, $AC = 4$, $AD = 5$, $CB = 3$, $DB = 4$, $DC = 1$ és $DO = 2$.

2 Mértékegységnek 1 cm-t használva ábrázoljuk a számtengelyen a $-\sqrt{2}$ számot!

Megoldás. Miképp VII. osztályban is láthattuk ez a szám pontosan ábrázolható körző segítségével. A $\sqrt{2}$ nem más, mint egy 1 hosszúságú egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogójának hossza.



3 **Másold le a négyzethálós füzetedbe a mellékelt ábrát!**



FT **a)** Határozd meg az $\dfrac{MP}{PQ}$ arány értékét!

b) Használva a $P(3{,}3)$ és $Q(3{,}4)$ pontok koordinátáit számítsd ki az OM és ON szakaszok hosszát, ahol O a számtengely kezdőpontja.

c) Használva az előző alpont adatait határozd meg az M és N pontok koordinátáit!

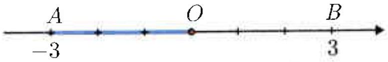
d) Számológépet használva, közelítsd századokra hiánnyal és többlettel a $\sqrt{11}$ számot, majd ábrázold ugyanazon a számtengelyen!

Útmutatás. b) $PQ = OQ - OP = 3{,}4 \text{ me} - 3{,}3 \text{ me} = 0{,}1 \text{ me}$; $PM = \dfrac{1}{10} \cdot PQ = \dfrac{1}{100} \text{ me} = 0{,}01 \text{ me}$

Akkor $OM = OP + PM = 3{,}3 \text{ me} + 0{,}01 \text{ me} = 3{,}31 \text{ me}$; $ON = OP + 9 \cdot PM = 3{,}3 \text{ me} + 9 \cdot 0{,}01 \text{ me} = 3{,}39 \text{ me}$ (vagy $ON = OQ - NQ$); c) $M(3{,}31)$ és $N(3{,}39)$.

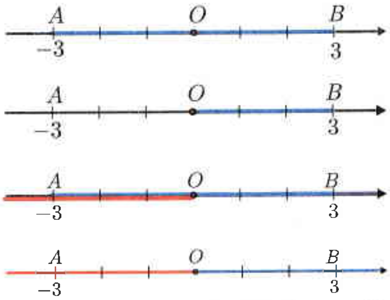
4 Adott a valós számtengelyen az $A(3)$ és $B(-3)$ pont.

a) Készíts különböző ábrákat az AB, OA, OB szakaszokhoz!



b) Ugyanazon az ábrán, jelöld különböző színnel az AB és BA félegyeneseket!

c) Ugyanazon az ábrán, jelöld különböző színnel az OA és OB félegyeneseket!



MINITESZT **Válaszd ki az egyetlen helyes válasz betűjelét az alábbi feladatokban!**

1. Figyeld meg a mellékelt ábrát!
A $-\sqrt{2}$ számnak a számtengelyen megfelel egy pont:

A. M és P között	**B.** P és Q között	**C.** a PM félegyenesen	**D.** a QN félegyenesen

2. Melyik reláció igaz $\sqrt{6}$ esetén?

A. $5 < \sqrt{6} < 6$	**B.** $2 < \sqrt{6} < 3$	**C.** $3 < \sqrt{6} < 4$	**D.** $4 < \sqrt{6} < 5$

3. Az $M = \{\overline{ab} \mid 8 < \sqrt{\overline{ab}} < 9\}$ halmaz kardinálisa:

A. 13	**B.** 14	**C.** 15	**D.** 16

Gyakorlatok és feladatok

1. Az O kezdőpontú valós számtengelyen adott az $A(1)$ és $B(2)$ pont.

a) Ábrázold az $OACD$ négyzetet, majd jelöld M-el a $\mathcal{C}(O, OC)$ kör és OA félegyenes metszéspontját! Határozd meg az M pont koordinátáját!

b) Ábrázold az $OBEF$ négyzetet, majd jelöld N-nel és P-vel a $\mathcal{C}(O, OE)$ kör és számtengely metszéspontját. Határozd meg az N és P pont koordinátáját, majd számold ki az NP szakasz hosszát!

2. Az O kezdőpontú valós számtengelyen adott az $A(1)$ és $B(2)$ pont. Felosztjuk az AB szakaszt AP_1, P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, P_4B kongruens szakaszokra.

a) Megfelelő mértékegységet választva készíts a feladat adatainak megfelelő ábrát!

b) Határozd meg a P_1, P_2, P_3, P_4 pontok koordinátáit!

c) Ábrázold a számtengelyen az $M(\sqrt{2})$ és $N(\sqrt{3})$ pontokat.

d) Határozd meg az alábbi kijelentések logikai értékét és töltsd ki a táblázatot!

Kijelentés	**I/H**
Az M pont a P_2P_3 szakasz eleme.	
Az N pont a P_4B szakasz eleme.	
$P_2P_3 > MN$	
Az MN szakasz felezőpontjának koordinátája 1,5-nél nagyobb irracionális szám.	

3. Másold a füzetbe és egészítsd ki úgy, hogy $\overline{a,b} < x < \overline{a,(b+1)}$, alakú relációkat kapjunk, ahol a természetes szám, valamint b egy 10-es számrendszerbeli számjegy.

a) $\ldots < \sqrt{2} < \ldots$

b) $\ldots < \dfrac{1}{2\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 6} < \ldots$

4. **a)** Írj három, $\dfrac{a}{10}$ alakú, 1-nél kisebb pozitív racionális számot, ahol $a \in \mathbb{N}$. Megfelelő mértékegységet választva ábrázold ezeket a számokat a számtengelyen!

b) Írj három, $-\sqrt{b}$ alakú, -2-nél nagyobb negatív irracionális számot, ahol $b \in \mathbb{N}$, Megfelelő mértékegységet választva ábrázold ezeket a számokat a számtengelyen!

c) Írd le az összes $3-\sqrt{a}$ alakú pozitív irracionális számot, ahol $a \in \mathbb{N}$. Megfelelő mértékegységet választva ábrázold a számtengelyen ezek közül a legkisebb és legnagyobb számot.

5. Határozd meg a halmaz kardinálisát!

$M = \{\overline{ab} \mid -6 < -\sqrt{\overline{ab}} < -5{,}5\}$.

6. Felvesszük a számtengelyen az $A(1)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(7)$ pontokat ebben a sorrendben, ahol $b \in \mathbb{N}$, $c \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

a) Keresd a, b és c egy olyan értékét, melyre $AB > CD$.

b) Mutasd ki, hogy nem létezik olyan $b \in \mathbb{Q}$ és $c \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, szám, melyre $AD = 2 \cdot BC$.

2.ℓ. Intervallumok. Az intervallumok ábrázolása a számtengelyen

Interdiszciplináris megjegyzés: Az intervallum különböző jelentései számos tudományágban fellelhetők: a fizika, a történelem, a földrajz, a kémia, a csillagászat, a statisztika, a zene és nyilvánvalóan a matematika területén is. Ez a kifejezés gyakran megjelenik mindannyiunk mindennapi beszédében, mivel gyakran utalunk bizonyos méretű, bizonyos határokon belül elhelyezkedő számértékekre.

Néhány *intervallum* típus:

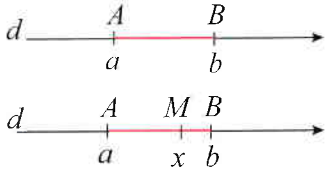
1) Az *időintervallum* két jelenség, két esemény, két egymást követő pillanat vagy egy jelenség/esemény kezdete és vége között eltelt idő. Az *évszázad* az 100 évet tartalmazó időintervallum.

2) A zenében az intervallumokat két zenei hang magassága határozza meg. Például a C dúr tartományban, az alsó dó és felső dó hang távolsága egy oktáv.

Fedezzük fel, értsük meg!

Egy tetszőleges d egyenesen meghatározzuk a *pozitív irányt*, *kezdőpontot* és *mértékegységet*. Az egyenes minden pontjának megfelel egy valós szám, illetve minden valós számnak megfelel a d egyenes egy pontja. Eszerint a d egyenes azonosítható a valós számok halmazával, és azt mondjuk, hogy a *d egyenes a valós számok halmazának mértani ábrázolása.*

A. Korlátos intervallumok



A d egyenes tetszőleges A és B pontja meghatároz egy szakaszt. E pontok megfelelő koordinátái a és b.
Az $a < b$ esetén legyen x olyan valós szám, melyre $a < x < b$.
Az x számnak megfelel a számtengely egy M pontja, mely az A és B pontok között található.

1) Ha a és b valós szám, $a < b$, akkor az a és b közötti összes valós szám halmaza az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a < x < b\}$, és az a és b szám által meghatározott *nyílt intervallum*nak nevezzük, valamint (a, b)-vel jelöljük.
A d egyenes A és B pontja közötti összes pont halmaza az $\{M \mid M \in d$ és M az A és B közötti$\}$ és nyílt szakasznak nevezzük, valamint (AB)-vel jelöljük.

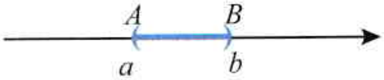
$(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a < x < b\}$
$(-2, 3) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $-2 < x < 3\}$

$(AB) = \{M \mid M \in d$ és M az A és B pontok közötti$\}$

A mellékelt ábrán a nyílt (AB) szakasz látható, ahol $A(-2)$ és $B(3)$ a végpontok.

a) Az (AB) szakasz nem más, mint az (a, b) intervallumban található összes szám mértani ábrázolása. Azt mondjuk, hogy az (AB) nyílt szakasz az (a, b) nyílt intervallumnak a számtengelyen való mértani ábrázolása.
b) Az (a, b) intervallum nem más, mint az (AB) szakaszon levő összes pont koordinátáinak (valós számok) halmaza.

Egyezmény: Az (a, b) nyílt intervallumot a megfelelő (AB) nyílt szakaszként ábrázoljuk a számtengelyen.
Megjegyzés: Ha $a = b$, akkor $(a, b) = \varnothing$.



2) Ha $a \leq b$, akkor az $(a, b) \cup \{a, b\}$, azaz $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a \leq x \leq b\}$, halmazt *zárt intervallum*nak nevezzük és $[a, b]$-vel jelöljük.
Az $(AB) \cup \{A, B\}$ halmazt zárt szakasznak nevezzük és $[AB]$-vel jelöljük.

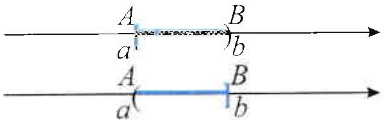
Egyezmény: Az $[a, b]$ zárt intervallumot a megfelelő $[AB]$ zárt szakaszként ábrázoljuk a számtengelyen.

Megjegyzés: Ha $a = b$ akkor $[a, b] = \{a\}$.

3) Az $(a, b) \cup \{a\}$ számhalmaz az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a \leq x < b\}$ jelöljük, $[a, b)$-vel, valamint az $(a, b) \cup \{b\}$ halmaz az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a < x \leq b\}$ és jelöljük $(a, b]$.

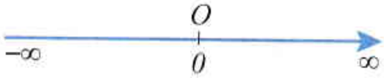
$[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a \leq x < b\}$
$(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $a < x \leq b\}$.

Az $(AB) \cup \{A\}$ pontok halmazát $[AB)$-vel, az $(AB) \cup \{B\}$ halmazt pedig $(AB]$-vel jelöljük. Ezeket a halmazokat *félig nyílt szakaszok*nak nevezzük.
Az $[a, b)$ félig nyílt intervallumot mértanilag az $[AB)$ nyílt szakasszal ábrázoljuk.
Az $(a, b]$ félig nyílt intervallumot mértanilag az $(AB]$ nyílt szakasszal ábrázoljuk



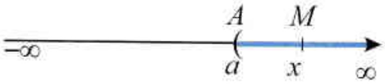
B. Nem korlátos intervallumok

A $-\infty$ ($-$ végtelen) és $+\infty$ ($+$ végtelen) szimbólumot használjuk, hogy kihangsúlyozzuk, egy valós számtengely nem korlátos. A mellékelt rajzon látható módon ábrázoljuk.



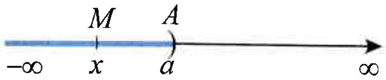
A d valós számtengelyen felvesszük az $A(a)$ és $M(x)$ pontokat.

1. Ha adott egy M pont a számtengelyen, az A ponttól jobbra, akkor: Az összes $x > a$ valós szám halmazát, azaz az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x > a\}$ halmazt $(a, +\infty)$-nel jelöljük és az *a szám által meghatározott, jobbról végtelen nyílt intervallumnak* nevezzük.
   Az $(a, +\infty)$ intervallumnak a számtengelyen való ábrázolása az $(AM$ nyílt félegyenes.



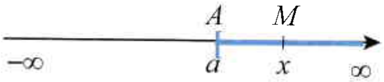
$(a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x > a\}$

2. Ha adott egy M pont a számtengelyen, az A ponttól balra, akkor: Az összes $x < a$ valós szám halmazát, azaz az $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x < a\}$ halmazt $(-\infty, a)$-val jelöljük és az *a szám által meghatározott, balról végtelen nyílt intervallumnak* nevezzük.
   Az $(-\infty, a)$ intervallumnak a számtengelyen való ábrázolása az $(AM$ nyílt félegyenes.



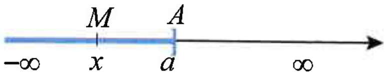
$(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x < a\}$

3. Az $(a, +\infty) \cup \{a\}$, azaz $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \geq a\}$ halmazt $[a, +\infty)$-nel jelöljük és az *a szám által meghatározott, jobbról végtelen zárt halmaznak* nevezzük.
   Az $[a, +\infty)$ intervallumnak a számtengelyen való ábrázolása az $[AM$ zárt félegyenes.



$[a, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \geq a\}$

4. A $(-\infty, a) \cup \{a\}$, azaz $\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \leq a\}$ halmazt $(-\infty, a]$-val jelöljük és az *a szám által meghatározott, balról végtelen zárt intervallumnak* nevezzük.
   A $(-\infty, a]$ intervallumnak a számtengelyen való ábrázolása az $[AM$ zárt félegyenes.



$(-\infty, a\,] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \leq a\}$

Megjegyzés: A valós számokból álló intervallum a valós számok halmazának részhalmaza.

5. A valós számok halmaza balról és jobbról is végtelen intervallum.

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Oldjuk meg figyelmesen!

1 PT Tanulmányozd csapattársaddal az alábbi táblázatot, majd írj további példákat olyan számokra, amelyek elemei, illetve nem elemei az adott intervallumnak.

Intervallum	Az intervallum leírása	Az intervallum két valós eleme	Indoklás	Két valós szám, mely nem eleme az intervallumnak	Indoklás
$[2, 3]$	$\{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $2 \leq x \leq 3\}$	$2{,}(4) \in [2, 3]$ $3 \in [2, 3]$	$2 \leq 2{,}(4) \leq 3$ $2 \leq 3 \leq 3$	$1{,}9 \notin [2, 3]$ $4 \notin [2, 3]$	$1{,}9 < 2$ $4 > 3$
$[1, +\infty)$	$[1, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \geq 1\}$	$\sqrt{2} \in [1, +\infty)$ $1 \in [1, +\infty)$	$\sqrt{2} \geq 1$ $1 \geq 1$	$0 \notin [1, +\infty)$ $-\sqrt{2} \notin [1, +\infty)$	$0 < 1$ $-\sqrt{2} < 1$
$(-\infty, -3]$	$(-\infty, -3] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ és $x \leq -3\}$	$-4 \in (-\infty, -3]$ $-3 \in (-\infty, -3]$	$-4 < -3$ $-3 = -3$	$-2 \notin (-\infty, -3]$ $0 \notin (-\infty, -3]$	$-2 > -3$ $0 > -3$